Chapitre 21

Variables aléatoires discrètes infinies

On suppose dans tout le chapitre qu'il y a un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ avec lequel on travaille, sans forcément le préciser.

I Généralisation des variables aléatoires

1) Définition :

On a déjà vu la définition d'une variable aléatoire. Pour le cas d'un espace quelconque, la définition est inchangée :

Définition 1

On appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}$.

Autrement dit : une variable aléatoire est telle que l'ensemble $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}$ est un événement.

Exemple :

1. Pour modéliser un jeu de "pile" ou "face", modélisé par $\Omega = \{\text{"pile"}, \text{"face"}\}$ muni de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$, on peut introduire une variable aléatoire X définie par $X(\text{"pile"}) = 1$ et $X(\text{"face"}) = 0$.
2. Notons X le nombre de tours nécessaires à l'obtention d'un 6 pour faire sortir le cheval de l'écurie dans le jeu des petits chevaux.
   Avec les notations de l'exemple du chapitre précédent, on aura $X(\omega) = k$ si $\omega \in A_k$.
   Par exemple, on a $X((1,4,3,6)) = 4$.

2) Univers image

Définition 2

On appelle univers image, ou support, d'une variable X, noté $X(\Omega)$, l'image de Ω par X. Ainsi,

$$X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$$

Autrement dit : $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs que peut prendre X.

A noter :

Cette année, nous n'étudierons que deux cas :
- $X(\Omega)$ est un ensemble fini (c'est le chapitre 13)
- $X(\Omega)$ est infini dénombrable (le plus souvent : une partie de $\mathbb{Z}$)

Dans ces deux cas, on dit que la variable aléatoire est discrète. Discrète finie dans le premier cas, discrète infinie dans le deuxième.

Exemples :

- Soit X la variable aléatoire donnant la somme obtenue en lançant deux dés

  $$X(\Omega) =$$

- Pour le premier lancer de dé qui donne un 6 : $X(\Omega) =$

3) Événements associés à une variable aléatoire :

On rappelle la notation introduite au chapitre 13 :

Définition 3

Soit X une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$. On note $[X \leq x]$ l'événement suivant :

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \leq x\}$$

Dans le même esprit, on introduit d'autres notations :

$$[X = a] \text{ pour } \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$$
$$[X < a] \text{ pour } \{\omega \in \Omega / X(\omega) < a\}$$
$$[a \leq X \leq b] \text{ pour } \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in [a, b]\}$$
$$\text{etc.}$$

Tous ces ensembles sont dans l'ensemble des événements $\mathscr{A}$ comme complémentaire, union, intersection (éventuellement infinies) d'éléments de $\mathscr{A}$.

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = \{x_k; k \in I\}$ (où $I \subset \mathbb{N}$ fini ou non et les x_i tous distincts).
Alors la famille $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements.
En particulier, $\sum_{k \in I} P(X = x_k) = 1$.

II Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

1) Rappel de la définition :

Définition 4

Soit X une v.a.r. discrète.
Notons $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$ l'univers image de X (où $I \subset \mathbb{N}$ fini ou non).
On appelle loi de probabilité de la variable X (ou simplement "loi de X") l'application

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\to [0, 1] \\ x_k &\mapsto P(X = x_k) \end{aligned}$$

Autrement dit, donner la loi d'une variable aléatoire discrète, c'est donner les probabilités des événements du système complet d'événement associé à la variable.

Méthode : *Chercher la loi d'une variable aléatoire*

Si les calculs et la réflexion est différente à chaque fois, on peut néanmoins dégager un "plan d'attaque" pour chercher la loi d'une variable aléatoire.

1. Qu'est-ce que $X(\Omega)$? Toujours prendre le temps de bien réfléchir à l'expérience étudiée, quitte à faire des schémas pour se repérer. Vous ne devez oublier aucune valeur possible pour X.
2. Est-ce une loi usuelle ? $X(\Omega)$ donne déjà des indices, mais il faut ensuite voir si "ça colle" avec les situations classiques d'utilisation des lois.
3. Si ce n'est pas une loi usuelle : poser des événements pour traduire de la meilleure façon possible les différents $[X = k]$ pour $k \in X(\Omega)$.
4. Calculer les $P(X = k)$.
5. Vérifier la cohérence des résultats : tous les $P(X = k)$ doivent être entre 0 et 1, et la somme doit donner 1.

2) Lois discrètes usuelles à connaître :

a) Rappel des lois finies :

Loi de Bernoulli

Définition 5

Soit $p \in]0,1[$. On appelle variable de Bernoulli de paramètre p toute v.a.r X vérifiant :
(i) $X(\Omega) = \{0,1\}$
(ii) Sa loi est donnée par $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$
Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

A noter : *Utilisation typique :*
On utilise cette loi pour la modélisation d'un phénomène n'admettant que deux issues. Par exemple pile ou face, avec $X(\text{“}pile''\text{)} = 1$ et $X(\text{“}face''\text{)} = 0$ et une probabilité p d'avoir “pile”.
On l'utilise ainsi pour des expériences de type “succès/echecs”, “positif/negatif”, etc...

Loi uniforme :

Définition 6

Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble fini de n éléments de $\mathbb{R}$. Soit X une v.a.r telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(X = e_i) = \frac{1}{n}$$

On dit alors que X suit une loi uniforme sur E, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$

A noter : *Utilisation typique :*
cette loi intervient de la même façon que la probabilité uniforme pour modéliser des événements équiprobables.
Par exemple pour modéliser un dé 6 faces équilibré, on utilisera une variable X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$.

Variable aléatoire binomiale

Définition 7

Soit X une variable aléatoire, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si et seulement si :
(i) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
(ii) $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

A noter : *utilisation typique :*
- Répétition d'une situation “succès/échec” et comptage des succès. Attention à vérifier l'indépendance des "tirages" successifs
- Tirage avec remise

b) Lois discrètes infinies à connaître :

Loi géométrique :
Reprenons l'exemple du jeu des petits chevaux, et posons X la variable donnant le nombre de lancers permettant d'obtenir un 6 (le lancer donnant 6 y compris).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit S_k l'événement "obtenir un 6 au $k-$ème lancer". Alors $P(S_k) = \frac{1}{6}$

On a ainsi donné la loi de X, qui fait partie d'une famille de loi :

Définition 8

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si et seulement si

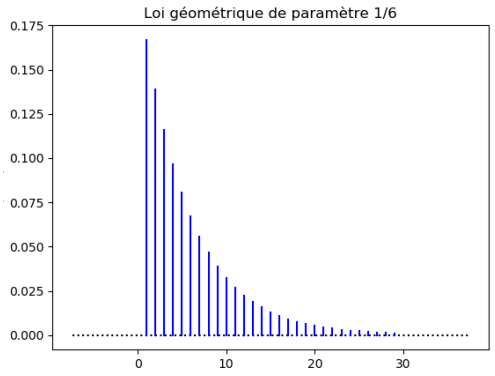
(i) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

A noter : *Utilisation typique*

La loi géométrique est la loi du premier succès. Elle est utilisée dans les situations où on répète une expérience de type Bernoulli de manière identique et indépendante (on dit "sans mémoire"), jusqu'à l'obtention d'un succès.



Remarque :
Le nom de la variable provient évidement de l'allure de la formule, qui rappelle une suite géométrique.
On peut aussi remarquer que la série de terme général $P(X = k)$ est une série géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} p(1-p)^{k} = p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^{k-1}$$

On reconnait une série géométrique de raison $(1-p)$, et ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

c) Loi de Poisson

Seconde loi discrète infinie à connaître en ECG : la loi de Poisson

Définition 9

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si

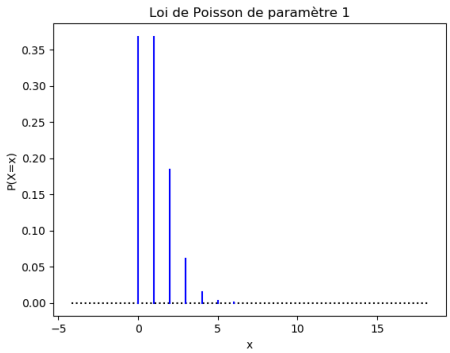
(i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

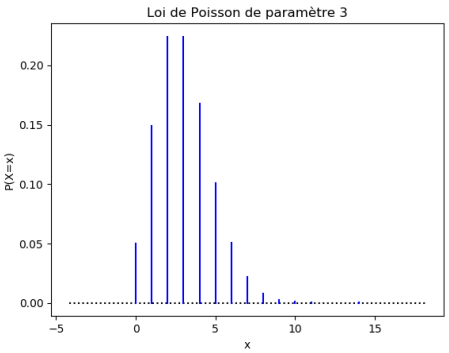
(ii) $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

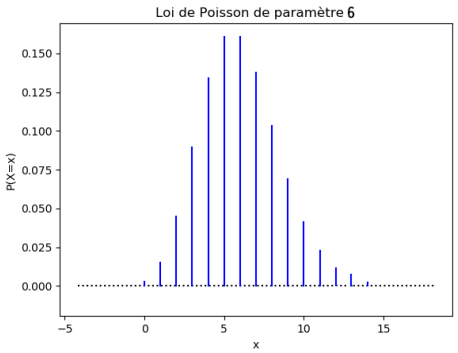
On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

A noter : *utilisation typique*

La loi de Poisson n'est pas associée à un modèle particulier, mais modélise de manière convaincante des comptage d'événements dans un intervalle donné.
Elle peut apparaitre comme approximation satisfaisante d'arrivée de clients à une caisse, ou en comptage de pannes de composants electronique par exemple. Elle a un lien avec la loi exponentielle vue en terminale, ainsi qu'avec la loi binomiale.







Remarque

La loi de Poisson est associée à la série exponentielle de façon assez évidente.

On a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

3) Variables aléatoires indépendantes

Définition 10

On dit que des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes (mutuellement) lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$ on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

Autrement dit, des variables aléatoires sont indépendantes si les événements associés à ces variables sont indépendants.

Exemple :

On lance deux dés 6 faces équilibrés, indépendants.
Soit X_1 la variable aléatoire modélisant le premier dé, X_2 celle modélisant le second dé. Ainsi, X_1 et X_2 sont indépendants.
Par exemple, l'événement "avoir un double 6" est $[X_1 = 6] \cap [X_2 = 6]$ et par indépendance on a donc

$P([X_1 = 6] \cap [X_2 = 6]) = P([X_1 = 6])P([X_2 = 6]) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$

4) Fonction de répartition

a) Définition

Définition 11

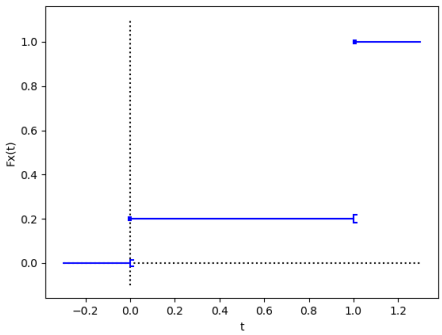
Soit X une variable aléatoire. On définit F_X, la fonction de répartition de X par

$$F_X : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to [0,1] \\ t & \mapsto P(X \leq t) \end{array}$$

Exemples :

1. Prenons X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = 0.8$.
   Ainsi, $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X = 0) = 0.2$ et $P(X = 1) = 0.8$.
   On cherche à calculer $F_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   Ceci donne le graphique suivant :



2. Reprenons l'exemple du dé équilibré, avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.

3. Soit X la variable certaine égale à $C \in \mathbb{R}$. Alors sa fonction de répartition est :

En résumé (pour des variables discrètes) :
En $-\infty$, F_X est nulle.
La fonction "saute" ensuite à chaque valeur de x_k possible pour X, d'une hauteur $P(X = x_k)$.
En $+\infty$ la fonction tend vers 1.

b) Propriétés

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire. Alors F_X est une fonction croissante et continue à droite

▷ *Preuve :*

On admet la continuité, qui sera démontrée en deuxième année.

◁

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire. Alors $\lim\limits_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$

▷ *Preuve :*

◁

On admet le théorème suivant, qui sera démontré en deuxième année :

Théorème 1

La fonction de répartition caractérise la loi de X.

Autrement dit : donner la fonction de répartition d'une variable aléatoire, c'est donner sa loi.

En effet, les "sauts" de la fonction de répartition correspondent aux probabilités d'avoir X en ces points.

III Espérance et Variance

1) Espérance

a) Espérance

Définition 12 (*rappel du cas fini*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r. avec $X(\Omega)$ un ensemble fini. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On appelle espérance de X la quantité noté $E(X)$ définie par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

Remarque : l'espérance d'une v.a. est la moyenne "avec coefficients" des résultats possibles : les coefficients sont les probabilités d'avoir ces résultats.

Pour une variable discrète infinie, le problème est que la somme n'est pas forcément finie. Il faut donc donner une autre version de la définition :

Définition 13 (*cas infini dénombrable*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r. avec $X(\Omega)$ infini dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$.
Si la série de terme général $x_k P(X = x_k)$ est ***absolument convergente****, on appelle espérance de X la quantité noté $E(X)$ définie par*

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X = x_k)$$

b) Rappel pour les lois finies :

Loi uniforme :

Proposition 2

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, alors $E(X) = \dfrac{n}{2}$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ (avec a et b dans $\mathbb{Z}$), alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Cas d'une Bernoulli

Proposition 3

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$.

Cas d'une binomiale :

Proposition 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$

Cas d'une loi certaine :

Proposition 5

Si X est certaine, alors $E(X) = X$

c) Espérance des lois discrètes infinies usuelles

Cas d'une loi géométrique

Ainsi (à retenir) : $\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ , alors } E(X) = \dfrac{1}{p}}$

Cas d'une loi de Poisson
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

2) Quelques propriétés de l'espérance :

a) Calcul et espérance :

Le théorème de transfert est valable dans sa version infinie, en ajoutant la convergence absolue :

Théorème 2

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.
La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si, et seulement si, la série de terme général $g(x_k)\,P(X = x_k)$ est absolument convergente.
Si c'est le cas, on a :

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)\,P(X = x_k)$$

▷ *Preuve* : Admis. ◁

Théorème 3 (*linearité*)

Soient X, Y deux v.a.r. admettant des espérances, et soient λ, μ des réels, alors

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

On dit que l'espérance est linéaire.

▷ *Preuve* : Admis. C'est le même genre de calcul que dans le cas fini avec des probas totales. ◁

b) Inégalité et espérance :

On rappelle la propriété de croissance de l'espérance :

Proposition 6

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$ presque sûrement.
Alors $E(X) \leq E(Y)$

A ceci peut s'ajouter le résultat ci-dessous, sorte de théorème des gendarmes version espérance :

Proposition 7 (*Existence d'une espérance par domination*)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant $0 \leq |X| \leq Y$
Alors si Y admet une espérance, X admet également une espérance et on a

$$|E(X)| \leq E(Y)$$

▷ *Preuve* : Admis ◁

3) Variance

a) Variance et écart type

Rappelons enfin la notion de variance, qui mesure la "distance" d'une variable à sa moyenne :

Définition 14

On appelle variance d'une v.a.r X le nombre, s'il existe :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

On appelle écart-type de X la quantité $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 8

Une variable aléatoire discrète X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance.

▷ *Preuve :*

◁

Remarque :
Même si ce n'est pas à proprement parler dans le programme, vous risquez de voir apparaître le mot **moment d'ordre 2** de X pour parler de $E(X^2)$ quand cette quantité existe. La suite de cette partie considère des VA pour lesquelles une variance existe.

Au cours de la preuve précédente, on a montré la proposition très utile en pratique suivante :

Proposition 9 (*Formule de Koenig-Huygens*)

Soit X une v.a.r., alors on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

De plus, on rappelle la règle de calcul suivante :

Proposition 10

Soit X une variable aléatoire discrète qui admet une variance et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

▷ *Preuve :*

◁

Cela permet en particulier le résultat ci dessous :

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire admettant une variance.
Alors $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une "variable aléatoire centrée réduite", c'est à dire $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

b) Rappels

Variance d'une Bernoulli

Proposition 11

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $V(X) = p(1-p)$

Variance d'une loi Binomiale

Proposition 12

si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, *alors* $V(X) = np(1-p)$

Variance de la loi uniforme

Propriété 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.
Alors $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

Variance d'une loi certaine :

Proposition 13

Soit X *une v.a.r. Alors* X *est une variable certaine si et seulement si* $V(X) = 0$

c) Calculs des variances des lois usuelles infinies :

Variance d'une loi de Poisson

Proposition 14

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $V(X) = \lambda$

Variance d'une loi géométrique :

Proposition 15

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, *alors* $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Lois discrètes usuelles

	Nom	Notation	Support $X(\Omega)$	Valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$	$\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
	Loi uniforme sur $\{a,a+1,\dots,b\}$ où $a,b \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\mathcal{U}(\{a,\dots,b\})$	$\{a,\dots,b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binomiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ